

斜齿行星齿轮传动系统振动模式与 动载特性

林 何, 王三民, 董金城
(西北工业大学 机电学院, 西安 710072)

摘 要: 斜齿行星传动在高速重载场合中应用越来越广泛,其振动模式和动载特性研究对减振降噪设计具有重要意义.针对斜齿行星齿轮传动系统,建立了随动坐标系,推导了含陀螺效应的多自由度间隙非线性动力学方程,求解了系统的固有特性.结果表明:斜齿行星齿轮系统存在3种典型振动模式,即轴向平移-扭转耦合振动模式(重根数 $r=1$),径向平移振动模式(重根数 $r=2$)和行星轮振动模式(重根数 $r=N-3, N>3$);综合考虑啮合刚度、齿侧间隙、综合误差和外载荷等激励作用,研究了啮合相位差和激励方式对动载系数的影响规律,结果表明计入啮合相位差时动载系数有所增大,当刚度波动系数 $\zeta=1.723$ 时,系统分岔为2周期次谐波响应,随着激励参数的变化,内啮合较外啮合更快的进入混沌状态.

关 键 词: 随动坐标系; 陀螺效应; 动载系数; 啮合相位差; 外激励

中图分类号: V233.1; TH113.1

文献标志码: A

Vibration mode and dynamical characteristics of helical planetary gear train

LIN He, WANG San-min, DONG Jin-cheng

(School of Mechanical Engineering,
Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, China)

Abstract: Helical planetary gear transmission was applied more extensively in high-speed and heavy load situations, as the vibration mode and dynamic characteristic had significant influence on vibration and noise reduction. Targeting the helical planetary gear transmission system, co-moving coordinate system was conducted, the multi-degree of freedom nonlinear dynamical equations including gyroscopic effect and backlash was derived, and the natural characteristic of the system was solved. The results show that helical planetary gear train has three typical vibration modes: axial translational-rotational coupled vibration mode (multiplicity $r=1$), translational vibration mode (multiplicity $r=2$) and planet vibration mode (multiplicity $r=N-3, N>3$); in consideration of mesh stiffness, backlash, general errors and external load, influence laws of mesh phase difference and excitation ways to dynamical coefficient have been studied, showing that mesh phase difference makes the dynamical coefficient increase; when stiffness fluctuation coefficient $\zeta=1.723$, the system is bifurcated into 2-period sub-harmonic response, with the changes of excitation parameters, internal engagement turning into the chaotic state is earlier than external engagement.

Key words: co-moving coordinate system; gyroscopic effect; dynamical coefficient; mesh phase difference; external excitations

斜齿行星齿轮系统具有传动比大、平稳性好、结构紧凑、承载能力高等优点,在航空航天、汽车、船舶等领域中得到了广泛应用^[1].为了改善其均载特性,提高其承载能力,国内外学者对行星齿轮系统的动力学特性都开展了许多有益的研究:杨通强、Parker 和 Eritenel 等^[2-4]分析了行星齿轮系统的固有特性;Ambarisha 等^[5]提出了通过控制啮合相位差来抑制系统的振动.相比直齿行星齿轮传动斜齿行星传动由于受力和结构复杂而考虑的自由度较多,且由于轴向分力引起激励,振动模式较为复杂,而传统的研究大多只对其固有特性进行了分析而对动载特性研究较少.为准确全面的分析斜齿行星齿轮系统的动力学特性,建立了行星架随动坐标系,并基于随动坐标系构建了平移-扭转耦合动力学模型,推导了含陀螺效应的多自由度运动微分方程,采用 Runge-Kutta 法求解了斜齿行星齿轮传动系统的固有特性和动载特性.

1 动力学模型

斜齿行星齿轮传动系统由太阳轮、行星架、内齿圈和 N 个行星轮组成.图 1 所示为含 3 个行星轮的斜齿行星齿轮系统动力学模型,各啮合齿轮副和弹性支撑处均含有阻尼,为保持模型简洁阻尼符号图中未标出.图中 OXY 为固定坐标系,原点在行星轮系的对称中心; Oxy 为行星架随动坐标系,固连在行星架上随行星架的转动而运转; $O_n x_n y_n (n=1,2,3)$ 为行星轮坐标系,随着行星架做等速旋转,其原点位于行星轮的几何中心位置.

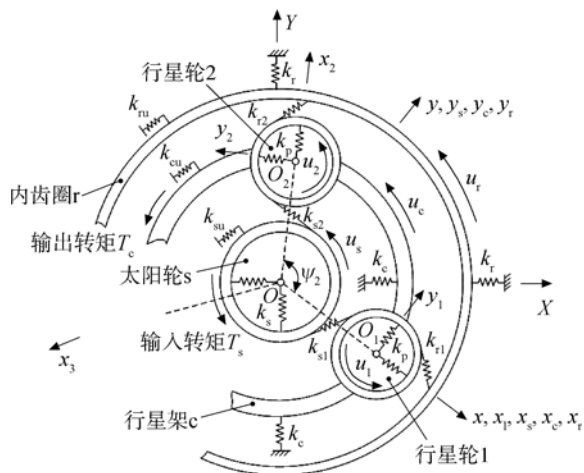


图1 斜齿行星齿轮系统平移-扭转耦合动力学模型

Fig.1 Translational-torsional coupled dynamical model of helical planetary gear train

行星轮系传动中,行星轮在自转的同时围绕着太阳轮做圆周运动,为分析陀螺效应对系统振动的影响建立图 2 所示行星轮系随动坐标系,其中 OXY 为绝对参考坐标系, Oxy 为随动坐标系, O 为行星传动理论安装中心, ω_c 为随动角速度.

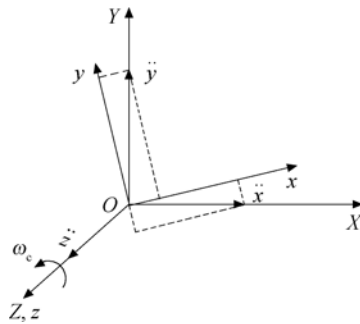


图2 行星轮系随动坐标系

Fig.2 Co-moving coordinate system of planetary gear train

根据坐标变换理论知

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \omega_c t & -\sin \omega_c t & 0 \\ \sin \omega_c t & \cos \omega_c t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad (1)$$

随动坐标系下各矢量方向的加速度为

$$\begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \omega_c t & \sin \omega_c t & 0 \\ -\sin \omega_c t & \cos \omega_c t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{X} \\ \ddot{Y} \\ \ddot{Z} \end{bmatrix} \quad (2)$$

式中 $\{\ddot{X}, \ddot{Y}, \ddot{Z}\}^T$ 为绝对加速度矢量在固定坐标系中的分量.由式(1)、式(2)可得各行星轮 $i_n (n=1, 2, 3)$ 在动坐标系中的质心运动加速度

$$\begin{cases} a_{ix} = \ddot{x}_i - 2\omega_c \dot{y}_i - \omega_c^2 x_i \\ a_{iy} = \ddot{y}_i + 2\omega_c \dot{x}_i - \omega_c^2 y_i \end{cases} \quad (3)$$

图 3 为内、外啮合齿轮副集中质量动力学模型.斜齿行星齿轮传动系统的广义坐标取为:太阳轮、行星轮、内齿圈及行星架的扭转线位移 $\tilde{u}_i = r_i \varphi_i$, 其中 r_i, φ_i 分别为构件 i 的基圆半径和扭转角位移;以及在端面和轴向的平移线位移 $\tilde{\lambda}_i = \{x_i, y_i, z_i\}^T (i=s, p, r, c)$, 则系统动力学模型共含有 $12+4n$ 个自由度,系统的广义坐标矢量为

$$\mathbf{q} = \{x_s, y_s, z_s, u_s, x_r, y_r, z_r, u_r, x_c, y_c, z_c, u_c, x_1, y_1, z_1, u_1, \dots, x_n, y_n, z_n, u_n\}^T$$

假设由太阳轮指向行星轮方向、行星轮指向内齿圈方向为啮合线正方向,考虑啮合线上的相对位移以及各广义坐标方向的叠加性,可得随动坐标系下含啮合误差的构件间相对位移如下:

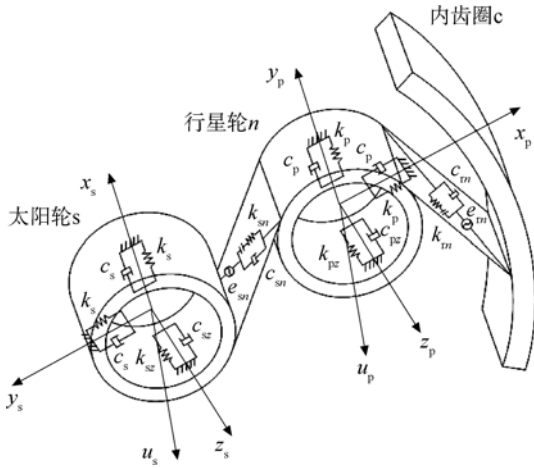


图3 构件间的动力学模型

Fig. 3 Dynamical model between the components

$$\begin{cases}
 \delta_{sn} = (u_s + u_n - x_n \sin \alpha - x_s \sin \psi_{sn} - y_n \cos \alpha + \\
 y_s \cos \psi_{sn}) \cos \beta + (z_s - z_n) \sin \beta - e_{sn}(t) \\
 \delta_{rn} = (u_r - u_n + x_n \sin \alpha - x_r \sin \psi_{rn} - y_n \cos \alpha + \\
 y_r \cos \psi_{rn}) \cos \beta + (z_n - z_r) \sin \beta - e_{rn}(t) \\
 \delta_{cnr} = x_c - u_c \sin \psi_n - x_n \cos \psi_n + y_n \sin \psi_n \\
 \delta_{cny} = y_c + u_c \cos \psi_n - x_n \sin \psi_n - y_n \cos \psi_n \\
 \delta_{cnz} = z_c - z_n \\
 \delta_{cnu} = u_c - y_n - x_c \sin \psi_n + y_c \cos \psi_n \\
 \delta_{pnr} = x_n - x_c \cos \psi_n - y_c \sin \psi_n \\
 \delta_{pny} = y_n - u_c + x_c \sin \psi_n - y_c \cos \psi_n
 \end{cases} \quad (4)$$

式中 $\delta_{cnr}, \delta_{cny}, \delta_{cnz}, \delta_{cnu}$ 分别为行星轮与行星架在 x_c, y_c, z_c, u_c 方向的相对位移; $\delta_{pnr}, \delta_{pny}$ 分别为行星轮与行星架在 x_n, y_n 方向的相对位移; $e_{sn}(t), e_{rn}(t)$ 分别为行星轮与太阳轮、内齿圈间的综合传动误差, 且 $e_{ij}(t) = E_{ij} \sin(\omega_{ij} t + \varphi_{ij})$, ω_{ij} 为齿轮 i 与 j 的啮合齿频 ($i=s, r; j=n$); ψ_{sn}, ψ_{rn} 分别为行星轮与太阳轮、内齿圈在 x_c 方向的夹角, 其值为 $\psi_{sn} = 2\pi(n-1)/N - \alpha$, $\psi_{rn} = 2\pi(n-1)/N + \alpha$.

设齿轮副的侧隙为 $2b$, 则行星轮与太阳轮、内齿圈之间的法向啮合力为

$$\begin{cases}
 F_{sn} = k_{ij}(t) f(\delta_{sn}, b) + c_{sn} \dot{\delta}_{sn} \\
 F_{rn} = k_{ij}(t) f(\delta_{rn}, b) + c_{rn} \dot{\delta}_{rn}
 \end{cases} \quad (5)$$

式中 $k_{ij}(t) = \bar{k}_a [1 + \zeta \sin(\omega_{ij} t + \varphi_{ij})]$. 其中 $\bar{k}_a, \zeta$ 分别为刚度均值和刚度波动系数; $f(\delta_{sn}, b), f(\delta_{rn}, b)$ 分别为行星轮与太阳轮、内齿圈间的间隙非线性函数.

设构件 j 的质量为 m_j , 转动惯量为 I_j , 阻尼为 c_j , 刚度为 k_j , 构件所受外力矩为 T_j , 行星轮个数为 N . 根据牛顿第二定律和质点系相对质心动量矩定理, 采用集中参数法可建立系统各构件在广义坐标下的平衡方程.

太阳轮的运动微分方程

$$\begin{cases}
 m_s(\ddot{x}_s - 2\omega_c \dot{y}_s - \omega_c^2 x_s) - \sum_{n=1}^N F_{sn} \cos \beta \sin \psi_{sn} + c_s \dot{x}_s + k_s x_s = 0 \\
 m_s(\ddot{y}_s + 2\omega_c \dot{x}_s - \omega_c^2 y_s) + \sum_{n=1}^N F_{sn} \cos \beta \cos \psi_{sn} + c_s \dot{y}_s + k_s y_s = 0 \\
 m_s \ddot{z}_s + \sum_{n=1}^N F_{sn} \sin \beta + c_{sz} \dot{z}_s + k_{sz} z_s = 0 \\
 \frac{I_s}{r_s^2} \ddot{u}_s + \sum_{n=1}^N F_{sn} \cos \beta + k_{su} u_s + c_{su} \dot{u}_s = \frac{T_s}{r_s}
 \end{cases} \quad (6)$$

行星架的运动微分方程

$$\begin{cases}
 m_c(\ddot{x}_c - 2\omega_c \dot{y}_c - \omega_c^2 x_c) + \sum_{n=1}^N c_p \dot{\delta}_{cnr} + \sum_{n=1}^N k_p \delta_{cnr} + c_c \dot{x}_c + k_c x_c = 0 \\
 m_c(\ddot{y}_c + 2\omega_c \dot{x}_c - \omega_c^2 y_c) + \sum_{n=1}^N c_p \dot{\delta}_{cny} + \sum_{n=1}^N k_p \delta_{cny} + c_c \dot{y}_c + k_c y_c = 0 \\
 m_c \ddot{z}_c + \sum_{n=1}^N c_{pz} \dot{\delta}_{cnz} + \sum_{n=1}^N k_{pz} \delta_{cnz} + c_{cz} \dot{z}_c + k_{cz} z_c = 0 \\
 \frac{I_c}{r_c^2} \ddot{u}_c + \sum_{n=1}^N c_p \dot{\delta}_{cnu} + \sum_{n=1}^N k_p \delta_{cnu} + c_{cu} \dot{u}_c + k_{cu} u_c = -\frac{T_c}{r_c}
 \end{cases} \quad (7)$$

行星轮的运动微分方程

$$\begin{cases} m_n(\ddot{x}_n - 2\omega_k \dot{x}_n - \omega_k^2 x_n) - F_{sn}\cos\beta\sin\alpha + F_{rn}\cos\beta\sin\alpha + c_p \dot{\delta}_{pnr} + k_p \delta_{pnr} = 0 \\ m_n(\ddot{y}_n + 2\omega_k \dot{x}_n - \omega_k^2 y_n) - F_{sn}\cos\beta\cos\alpha - F_{rn}\cos\beta\cos\alpha + c_p \dot{\delta}_{pny} + k_p \delta_{pny} = 0 \\ m_n \ddot{z}_n - F_{sn}\sin\beta + F_{rn}\sin\beta - c_{pz} \dot{\delta}_{cnz} - k_{pz} \delta_{cnz} = 0 \\ (I_n/r_n^2) \ddot{u}_n + F_{sn}\cos\beta - F_{rn}\cos\beta = 0 \end{cases} \quad (8)$$

内齿圈的运动微分方程

$$\begin{cases} m_r(\ddot{x}_r - 2\omega_k \dot{y}_r - \omega_k^2 x_r) - \sum_{n=1}^N F_{rn}\cos\beta\sin\psi_{rn} + c_r \dot{x}_r + k_r x_r = 0 \\ m_r(\ddot{y}_r + 2\omega_k \dot{x}_r - \omega_k^2 y_r) + \sum_{n=1}^N F_{rn}\cos\beta\cos\psi_{rn} + c_r \dot{y}_r + k_r y_r = 0 \\ m_r \ddot{z}_r - \sum_{n=1}^N F_{rn}\sin\beta + c_{rz} \dot{z}_r + k_{rz} z_r = 0 \\ \frac{I_r}{r_r^2} \ddot{u}_r + \sum_{n=1}^N F_{rn}\cos\beta + c_{ru} \dot{u}_r + k_{ru} u_r = \frac{T_r}{r_r} \end{cases} \quad (9)$$

式(6)~式(9)为含陀螺效应随动坐标系下构件的运动微分方程,可以看出,陀螺效应对系统影响的大小主要取决于行星架的转速 ω_k . 上述方程组可统一表述为

$$\begin{aligned} \mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + (\mathbf{C}_b + \mathbf{C}_m + \omega_k \mathbf{G})\dot{\mathbf{q}} + \\ (\mathbf{K}_b + \mathbf{K}_m - \omega_k^2 \mathbf{K}_\omega)\mathbf{q} = \mathbf{T} \end{aligned} \quad (10)$$

式中 $\mathbf{M}$ 为构件质量矩阵, $\mathbf{T}$ 为外载荷向量, $\mathbf{q} = [x_i, y_i, z_i, u_i]^T$, $(i=s, n, r, c)$; $\mathbf{C}_b, \mathbf{C}_m, \mathbf{G}$ 分别为支承阻尼矩阵、啮合阻尼矩阵、陀螺矩阵; $\mathbf{K}_b, \mathbf{K}_m, \mathbf{K}_\omega$ 分别为支承刚度矩阵、啮合刚度矩阵、向心刚度矩阵.

为降低动力学方程的维数,引入一组相对位移矢量 $\mathbf{X} = \{\delta_{sn}, \delta_{rn}, \delta_{cn}\}^T$ 作为新的广义坐标,合并消除式(6)~式(9)中扭转振动方程的刚体位移. 为提高数值计算的质量和精度定义量纲一化时间 τ 和位移标称尺度 b_c , 对降维后的系统方程进行量纲一化处理,所需变量如下^[6-9]:

$$\tau = t/\omega_n, \quad \omega_n = \sqrt{k_{s1}(1/M_s + 1/M_1)}$$

$$\bar{X}(\tau) = x(t)/b_c, \quad \ddot{e}(\tau) = \ddot{e}(t)/\omega_n^2 b_c$$

$$M_s = I_s/r_{bs}^2, \quad M_1 = I_1/r_{b1}^2$$

式中 M_s, M_1 为太阳轮、行星轮 1 的等效质量; r_{bs}, r_{b1} 为太阳轮、行星轮 1 的基圆半径. 量纲一化后的系统振动方程可整理成如下 2 阶微分方程的矩阵形式:

$$\bar{\mathbf{M}}\ddot{\bar{\mathbf{X}}} + \bar{\mathbf{C}}\dot{\bar{\mathbf{X}}} + \bar{\mathbf{K}}f(\bar{\mathbf{X}}) = \bar{\mathbf{T}} \quad (11)$$

式中 $\bar{\mathbf{M}}, \bar{\mathbf{C}}, \bar{\mathbf{K}}, f(\bar{\mathbf{X}}), \bar{\mathbf{T}}$ 分别为量纲归一化后的系统质量矩阵、阻尼矩阵、刚度矩阵、间隙函数列矢量和载荷矢量.

齿轮副间因啮合刚度的时变性和内外部载荷的激励而产生振动,对于非变位的渐开线齿轮,为

准确衡量其动载特性定义如下关系式^[10]:

$$K_v = \frac{\bar{k}_a x(t) + c\dot{x}(t)}{f_n} \quad (12)$$

其中 $f_n = T/(Nr_{bs}\cos\beta)$ 为啮合副接触线上的法向静载荷, K_v 为量纲一化动载系数.

2 动力学特性

2.1 固有特性分析

表 1 为斜齿行星齿轮传动系统的动力学参数,其中齿轮模数 $m=4$, 压力角 $\alpha=20^\circ$, 螺旋角 $\beta=12^\circ$, 扭转阻尼比 $\xi=0.005$, 啮合阻尼比 $\zeta=0.03$.

表 1 斜齿行星齿轮系统动力学参数

Table 1 Dynamic parameters of helical planetary gear train

参数	太阳轮	行星轮	内齿圈	行星架
齿数	23	43	109	
转动惯量/ (kg·m ²)	0.00127	0.00166	0.0414	0.0237
支承刚度/(N/m)	$k_x=k_y=1.08\times10^8$		$k_z=1.33\times10^8$	
扭转刚度/(N/m)	$k_s=k_p=k_c=0\quad k_r=10^9$			
啮合刚度/(N/m)	$k_{sn}=1.26\times10^8$		$k_{rn}=1.53\times10^8$	

当不考虑系统阻尼和外部激励项时,系统动力学模型简化为

$$[k_i(t) - \omega_i^2 m_i] \boldsymbol{\eta}_i = 0 \quad (i=s, n, r, c) \quad (13)$$

$$m_i = \text{diag} \{m_i, m_i, m_i, M_i\}$$

式中 m_i 为构件 i 的质量, M_i 为构件 i 的等效质量, $\boldsymbol{\eta}_i = \{x_i, y_i, z_i, u_i\}^T$ 为 n 阶模态振型矢量.

取行星轮数目 $N=3, 4, 5$ 时,解得系统固有频率含 3 类重根,其重根数和固有频率如表 2 所

示,3类重根分别对应着3种振动模式,即中心构件轴向平移-扭转耦合振动、中心构件径向平移振动、以及行星轮振动模式.设系统固有频率为 ω^i ($i=1,2,3,\dots,4N+12$),则单重根(10个)对应中心构件轴向平移扭转振动模式,双重根(7对)对应中心构件径向平移振动模式,行星轮振动模式时的重根数 $r(r=N-3, N>3)$ 与行星轮数目 N 相关.

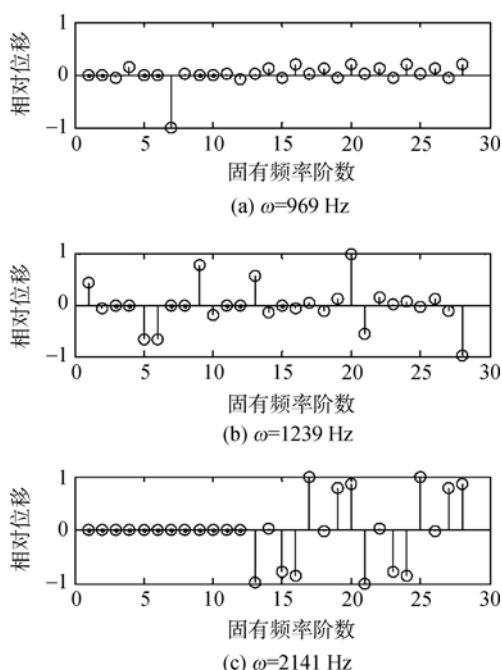
系统第 j 阶固有频率 ω^j ,其对应的振型矢量为 $\boldsymbol{\eta}_j=\{\zeta_i^j\}^T$,其中 $\zeta=x,y,z,u$; $i=s,n,r,c$; $j=1,2,3,\dots,4N+12$).以行星轮数目 $N=4$ 为例,

系统共有28个特征值,其3种振动模式的振型如图4所示,任一模式下构件均存在某些振型矢量元素为0,即未引起振动.图5为对应的3种模式的振动示意图,其中图5(a)为中心构件轴向平移-扭转耦合振动模式(z,u 方向振动),对应10阶固有频率,重根数为1;图5(b)为中心构件径向平移振动模式(x,y 方向振动),共有14阶固有频率,重根数为2;图5(c)为行星轮振动模式(x,y,z,u 方向均振动),含有4阶固有频率,此时中心构件未振动,重根数为1.

表2 系统固有频率的重根数与固有频率

Table 2 Multiplicity and natural frequency of the system

行星轮数	固有频率 ω/Hz		
	中心构件轴向平移扭转模式 (重根数 $r=1$)	中心构件径向平移模式 (重根数 $r=2$)	行星轮模式 (重根数 $r=N-3$)
3	0.757, 1.041, 1.964, 2.455, 2.884, 3.019, 3.710, 6.193, 6.354	948, 1.255, 2.156, 2.538, 2.870, 4.828, 5.942	
4	0.721, 969, 2.049, 2.533, 2.903, 3.150, 3.731, 6.498, 6.962	923, 1.239, 2.141, 2.529, 2.981, 4.928, 6.378	2.141, 2.485, 4.097, 4.556
5	0.689, 893, 2.084, 2.587, 2.902, 3.293, 3.807, 6.776, 7.526	899, 1.214, 2.188, 2.522, 3.101, 5.021, 6.780	2.141, 2.485, 4.097, 4.556

图4 $N=4$ 时系统3种振动模式的振型图Fig. 4 Three types vibration mode diagrams of system when $N=4$

2.2 啮合相位差对动载特性的影响

行星齿轮啮合传动中,前后齿面均承受载荷,啮合相位差的存在使内外啮合之间产生异步啮

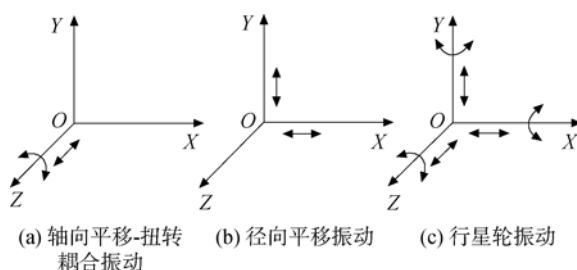


图5 3种振动模式的振动示意图

Fig. 5 Three types vibration schematic diagrams

合,其相位关系主要由齿轮齿数和行星轮个数决定.假定以图1中行星轮1的位置为基准,当行星架转动 2π 角时,从行星轮1到达行星轮 i 需完成 $\phi_i z_s/2\pi$ 次啮合次数,从而可得行星轮的啮合相位关系为^[11-12]

$$\psi_{si} = \pm \frac{\phi_i z_s}{2\pi} \quad \psi_n = \mp \frac{\phi_i z_r}{2\pi} \quad (14)$$

式中“+”表示行星架逆时针转动,“-”表示行星架顺时针转动, ϕ_i 为第 i 个行星轮与基准行星轮圆周方向的夹角.

以4个行星轮为例,各行星轮之间的周向夹角为 $\pi/2$,行星架逆时针转动时,其啮合相位关系

分别为 $0, z_r/4, z_r/2, 3z_r/4$. 图 6 为相位差与动载特性的关系, 由图 6 知未考虑啮合相位差时外、内啮合的动载系数分别为 1.28 和 1.35, 计入啮合相位差时动载系数分别为 1.41 和 1.43, 两者均有所增大, 此时内啮合的振动强于外啮合.

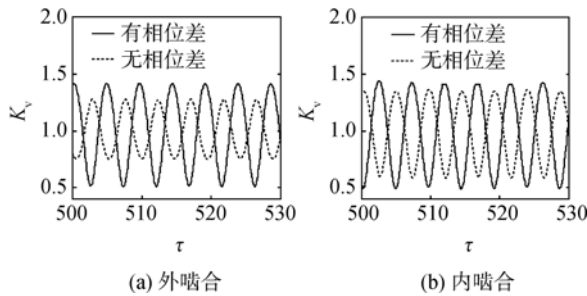


图 6 动载系数 K_v 时间历程

Fig. 6 Time histories of dynamical coefficient K_v

2.3 多激励对动载特性的影响

图 7 为系统在多种激励下的动载系数时间历

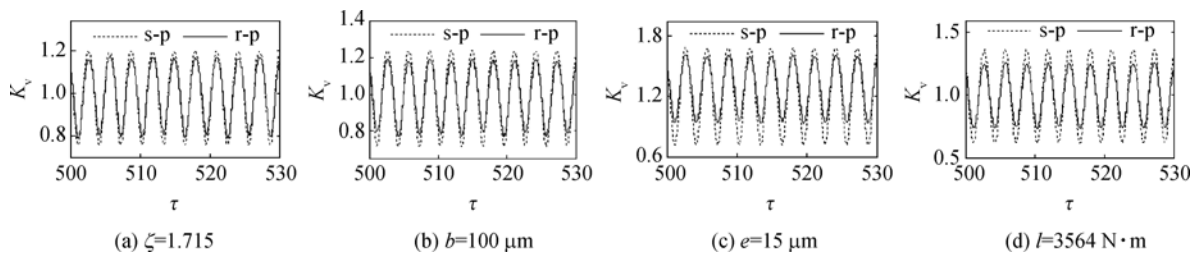


图 7 不同激励下的动载系数时间历程

Fig. 7 Time histories of dynamical coefficient under various excitations

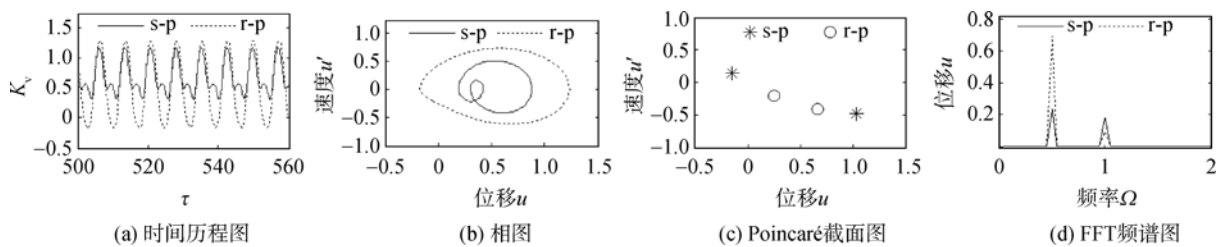


图 8 $\zeta=1.723$ 时系统动态响应

Fig. 8 Dynamic responses of system when $\zeta=1.723$

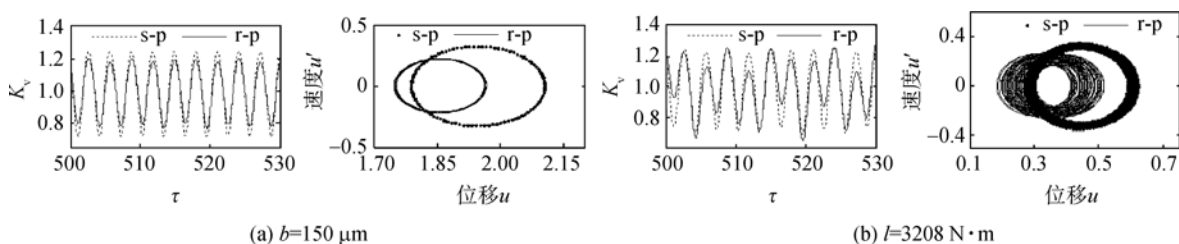


图 9 不同激励下的系统动态响应

Fig. 9 Dynamic responses of system under various excitations

程(图中 s-p, r-p 分别表示行星轮与太阳轮、内齿圈间的啮合. 图 7(a)刚度波动系数 $\zeta=1.715$; 图 7(b)齿侧间隙 $b=100 \mu\text{m}$; 图 7(c)综合误差 $e=15 \mu\text{m}$; 图 7(d)外载荷 $l=3564 \text{ N} \cdot \text{m}$). 外部载荷的波动以行星架负载所受载荷的谐波函数形式给出即 $l=T_s i[1+\lambda \sin(\omega_k t+\phi)]$. 4 种激励下的 K_v 均为单周期简谐响应, 都在 1 附近波动, 振幅不同, 均为正面冲击, 综合误差激励时动载系数最大, 且太阳轮、行星轮间的动载系数均大于行星轮、内齿圈间的动载系数^[13-15]. 由图 8(图中横坐标、纵坐标的数值进行了量纲一化的处理)系统对时变刚度的响应知, $\zeta=1.723$ 时内啮合动载系数的时间历程为简谐函数, 外啮合则为多频响应, 显示出非线性特征, 根据 Poincaré 映射(图 8(c))和 FFT(快速傅里叶变换)频谱分析(图 8(d))知内、外啮合均为 2 周期次谐波响应, 系统周期在此处分岔为 $2T$. 改变激励参数, 当 $b=150 \mu\text{m}$, $e=20 \mu\text{m}$ 时, 图 9(a)所示内啮合相图开始出现非重叠, 此时 K_v 为多周期谐波响应; 图 9(b)中 $l=3208 \text{ N} \cdot \text{m}$ 时, 相

平面为一定区域相互层叠的椭圆,内、外啮合均表现出强非线性,系统进入混沌状态^[16-18],上述亦表明内啮合较外啮合更快的进入混沌状态。

3 结 论

1) 斜齿行星齿轮系统含有3种典型振动模式:即轴向平移-扭转耦合振动模式(重根数 $r=1$),径向平移振动模式(重根数 $r=2$),行星轮振动模式(重根数 $r=N-3, N>3$)。

2) 啮合相位差的存在使内、外啮合的动载系数有所增大,动力学设计时应考虑啮合相位差的影响。

3) 在多种激励分别作用下系统为单周期简谐响应,当刚度波动系数 $\zeta=1.723$ 时,系统分岔为2周期次谐波响应,改变激励参数时,内啮合较外啮合更快的进入混沌状态。

参考文献:

- [1] 屈文涛. 直升机动力旋翼系统及航空齿轮系统的振动研究[D]. 西安:西北工业大学,1995.
QU Wentao. Study on helicopter rotor dynamic system and the vibration of the gear system[D]. Xi'an: Northwestern Polytechnical University, 1995. (in Chinese)
- [2] 杨通强,宋铁民,张策,等. 斜齿行星齿轮系统自由振动特性分析[J]. 机械工程学报,2005,41(7):50-55.
YANG Tongqiang, SONG Yimin, ZHANG Ce, et al. Property analysis of free vibration of helical planetary gear trains[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2005, 41(7): 50-55. (in Chinese)
- [3] Parker R G, Lin J. Mesh phasing relationships in planetary and epicyclic gears [J]. Journal of Mechanical Design, 2004, 126(2): 365-370.
- [4] Eritenel T, Parker R G. Modal properties of three-dimensional helical planetary gears[J]. Journal of Sound and Vibration, 2009, 325(1): 397-420.
- [5] Ambarisha V K, Parker R G. Suppression of planet mode response in planetary gear dynamics through mesh phasing [J]. Journal of Vibration and Acoustics, 2006, 128(2): 133-142.
- [6] Mark V D, Hines J A. Stationary transducer response to planetary-gear vibration excitation with non-uniform planet loading[J]. Mechanical Systems and Signal Processing, 2009, 23(4): 1366-1381.
- [7] 孙智明,沈允文,李素有. 封闭行星齿轮传动系统的扭振特性研究[J]. 航空动力学报,2001,16(2):163-166.
SUN Zhimin, SHEN Yunwen, LI Suyou. A study on torsional vibration in an encased differential gear train[J]. Journal of Aerospace Power, 2001, 16(2): 163-166. (in Chinese)
- [8] 李润方,王建军. 齿轮系统动力学:振动、冲击、噪声[M]. 北京:科学出版社,1997.
- [9] Sondkar P, Kahraman A. A dynamic model of a double-helical planetary gear set[J]. Mechanism and Machine Theory, 2013, 70(7): 157-174.
- [10] 郭家舜,王三民,刘海霞. 某新型直升机传动系统弯-扭耦合振动特性研究[J]. 振动与冲击,2009,28(10):132-140.
GUO Jiashun, WANG Sanmin, LIU Haixia. Lateral-torsional coupled vibration characteristics of transmission of a new type helicopter[J]. Journal of Vibration and Shock, 2009, 28(10): 132-140. (in Chinese)
- [11] 秦大同,肖正明,王建宏. 基于啮合相位分析的盾构机减速器多级行星齿轮传动动力学特性[J]. 机械工程学报,2011,47(23):20-29.
QIN Datong, XIAO Zhengming, WANG Jianhong. Dynamic characteristics of multi-stage planetary gears of shield tunneling machine based on planet mesh phasing analysis [J]. Journal of Mechanical Engineering, 2011, 47(23): 20-29. (in Chinese)
- [12] 史志伟. 行星传动啮合相位计算方法研究[J]. 科学计算与工程,2011,11(22):5286-5289.
SHI Zhiwei. A method to determine the mesh phasing in planetary gear train[J]. Science Technology and Engineering, 2011, 11(22): 5286-5289. (in Chinese)
- [13] Tamminana V K, Kahraman A, Vijayakar S. A study of the relationship between the dynamic factors and the dynamic transmission error of spur gear pairs[J]. Journal of Mechanical Design, 2007, 129(1): 75-84.
- [14] Sweeney P J, Randall R B. Gear transmission error measurement using phase demodulation[J]. Journal of Mechanical Engineering Science, 1996, 210(3): 201-213.
- [15] Velex P, Ajmi M. Dynamic tooth loads and quasi-static transmission errors in helical gears: approximate dynamic factor formulae [J]. Mechanism and Machine Theory, 2007, 42(11): 1512-1526.
- [16] 张锁怀,沈允文,董海军,等. 转速和不平衡质量对齿轮拍击振动的影响[J]. 航空动力学报,2003,18(1):197-203.
ZHANG Suohuai, SHEN Yunwen, DONG Haijun, et al. The influence of speed and mass unbalance on dynamic characteristics of a gear-rattling system [J]. Journal of Aerospace Power, 2003, 18(1): 197-203. (in Chinese)
- [17] 朱自冰,朱如鹏,鲍和云. 两级星型齿轮传动系统非线性动力学研究[J]. 航空动力学报,2007,22(11):1963-1970.
ZHU Zibing, ZHU Rupeng, BAO Heyun. Non-linear dynamic study of 2-stage gear train[J]. Journal of Aerospace Power, 2007, 22(11): 1963-1970. (in Chinese)
- [18] 崔亚辉,刘占生,叶建槐,等. 内外激励作用下含侧隙的齿轮传动系统的分岔和混沌[J]. 机械工程学报,2010,46(11):129-136.
CUI Yahui, LIU Zhansheng, YE Jianhui, et al. Bifurcation and chaos of gear transmission system with clearance subjected to internal and external excitation [J]. Journal of Mechanical Engineering, 2010, 46(11): 129-136. (in Chinese)

(编辑:秦理曼、叶青)